

КПД термодинамических циклов

В. ДРОЗДОВ

УКАЗАННАЯ В ЗАГЛАВИИ СТАТЬИ ТЕМА ФАКТИЧЕСКИ ЗАВЕРШАЕТ школьный курс термодинамики. Поэтому для решения задач на определение КПД циклов требуется знание почти всего предшествующего материала. В силу этого обстоятельства, такие задачи часто используются для проверки знаний учащихся на экзаменах, в том числе и в форме ЕГЭ.

Коэффициент полезного действия η термодинамического цикла определяется по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, подведенное к рабочему телу (газу) за цикл от нагревателя, Q_2 – количество теплоты, отданное рабочим телом за цикл холодильнику, $A = Q_1 - Q_2$ – работа газа за цикл.

Ограничимся случаем, когда рабочим телом является идеальный одноатомный газ. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты Q_{12} , полученное идеальным газом при переходе из состояния 1 в состояние 2, равно сумме изменения внутренней энергии газа и совершенной им работы:

$$Q_{12} = (U_2 - U_1) + A_{12}.$$

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа с учетом уравнения Клапейрона–Менделеева может быть записана в виде

$$U = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} pV,$$

где ν – количество молей газа, T – температура газа, p – его давление, V – объем, R – универсальная газовая постоянная. Работа газа A_{12} численно равна площади под графиком зависимости давления от объема, выраженной в энергетических единицах (в СИ – в джоулях).

Теперь переходим к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. Найдите КПД цикла, изображенного на рисунке 1.

Решение. Легко видеть, что работа газа за цикл равна

$$A = \frac{1}{2} (2p_0 - p_0) (2V_0 - V_0) = \frac{1}{2} p_0 V_0.$$

Осталось найти подведенное к газу количество теплоты Q_1 .
На участке 1–2 работа газа равна нулю, а давление растет при постоянном объеме, т.е. температура газа повышается. Значит, на этом участке газ получает тепло. На участке 2–3 работа газа A_{23} положительна, а объем растет при постоянном давлении, т.е. температура газа растет.

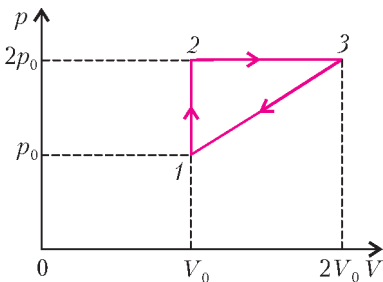


Рис. 1

Следовательно, на этом участке газ тоже получает тепло. А вот на участке 3–1 работа газа отрицательна (ибо газ сжимают), к тому же одновременно падают и давление и объем газа, что приводит к охлаждению газа. Иными словами, на участке 3–1 газ тепло не получает. Итак,

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = (U_2 - U_1) + A_{23} + (U_3 - U_2) = (U_3 - U_1) + A_{23}.$$

Учитывая, что

$$A_{23} = 2p_0 (2V_0 - V_0) = 2p_0 V_0,$$

получаем

$$Q_1 = \left(\frac{3}{2} \cdot 2p_0 \cdot 2V_0 - \frac{3}{2} p_0 V_0 \right) + 2p_0 V_0 = \frac{13}{2} p_0 V_0.$$

Теперь находим КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(1/2)p_0 V_0}{(13/2)p_0 V_0} = \frac{1}{13} \approx 7,7\%.$$

Задача 2. На рисунке 2 изображен цикл дизельного двигателя, состоящий из адиабат 1–2 и 3–4, изобары 2–3 и изохоры 4–1. Температуры газа в точках 1, 2, 3, 4 равны T_1, T_2, T_3, T_4 соответственно. Найдите КПД цикла.

Решение. Работу газа как «энергетическую площадь» цикла здесь вычислить нелегко – цикл криволинейный. Но в этом нет никакой нужды. Вычислим КПД через подведенное и отведенное количества теплоты Q_1 и Q_2 .

Естественно, на адиабатах тепло не подводится и не отводится. На изобаре 2–3 тепло подводится, ибо объем растет и, соответственно, растет температура. На изохоре 4–1 тепло отводится, так как давление и температура падают. Таким образом,

$$Q_1 = Q_{23} = (U_3 - U_2) + A_{23} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2) + p_2 (V_3 - V_2) = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2) + \nu R (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_2).$$

Аналогично,

$$Q_2 = U_4 - U_1 = \frac{3}{2} \nu R (T_4 - T_1).$$

Окончательно получаем

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{3(T_4 - T_1)}{5(T_3 - T_2)}.$$

Задача 3 (МИЭМ, 1990). Определите КПД цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор (рис. 3). Известно, что в процессе адиабатного расширения устанавливается температура $T_2 = 0,75T_1$, а в процессе адиабатного сжатия $T_3 = 0,75T_4$.

Решение. На изохоре 4–1 тепло подводится, на

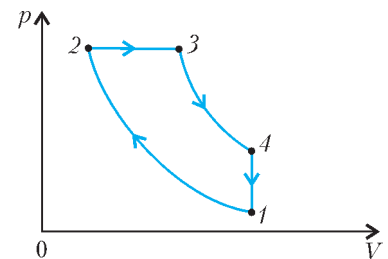


Рис. 2

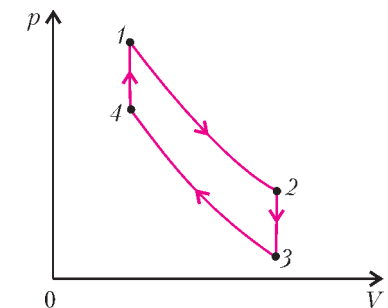


Рис. 3

изохоре 2-3 тепло отводится, на обеих адиабатах теплообмена нет. Кроме того, работа на изохорах не совершается. Поэтому

$$Q_1 = U_1 - U_4, \quad Q_2 = U_2 - U_3.$$

Значит,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{U_2 - U_3}{U_1 - U_4} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}.$$

С учетом условия задачи окончательно получаем

$$\eta = 1 - \frac{0,75T_1 - 0,75T_4}{T_1 - T_4} = 1 - 0,75 = 0,25 = 25\%.$$

Задача 4 (МФТИ, 1989). КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермы 1-2, изохоры 2-3 и адиабаты 3-1 (рис.4), равен η . Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле составляет ΔT . Найдите работу, совершенную в молях газа в изотермическом процессе.

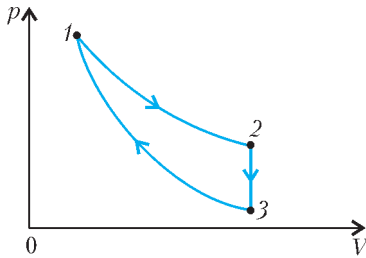


Рис. 4

Решение. Хотя в данной задаче КПД известен, выразим его, как и в предыдущих задачах, через количества теплоты Q_1 и Q_2 и искомую работу A_{12} .

Так как точки 1 и 2 лежат на одной изотерме, то $T_1 = T_2$ и, соответственно, $U_2 = U_1$. Ясно, что $\Delta T = T_2 - T_3$, ведь точка 3 лежит ниже точки 2. Тогда

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12}.$$

Тепло на изотерме действительно подводится, поскольку работа расширения газа A_{12} заведомо положительна. А на изохоре тепло отводится, причем

$$Q_2 = Q_{23} = U_2 - U_3 = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_3) = \frac{3}{2} \nu R \Delta T.$$

Следовательно,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(3/2) \nu R \Delta T}{A_{12}},$$

откуда находим

$$A_{12} = \frac{1,5 \nu R \Delta T}{1 - \eta}.$$

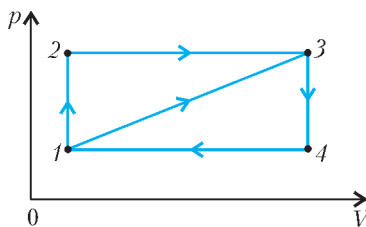


Рис. 5

Задача 5 (МФТИ, 2005). В цикле 1-3-4-1 (рис.5) КПД равен η . Чему равен КПД η' цикла 1-2-3-4-1?

Решение. Так как диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника, работа, совершенная во втором цикле 1-2-3-4-1, вдвое

больше работы A в первом цикле 1-3-4-1.

В первом цикле тепло, очевидно, подводится только на участке 1-3. При этом

$$Q_1 = Q_{13} = A_{13} + (U_3 - U_1),$$

где

$$A_{13} = A + p_1 (V_4 - V_1).$$

Значит,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + p_1 (V_4 - V_1) + (U_3 - U_1)}.$$

Во втором цикле тепло подводится только на участках 1-2 и 2-3:

$$Q'_1 = Q_{12} + Q_{23} = (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + A_{23} = (U_3 - U_1) + A_{23},$$

где

$$A_{23} = 2A + p_1 (V_4 - V_1).$$

Следовательно,

$$\eta' = \frac{2A}{Q'_1} = \frac{2A}{2A + p_1 (V_4 - V_1) + (U_3 - U_1)}.$$

Выразив величину $p_1 (V_4 - V_1) + (U_3 - U_1)$ из уравнения для η , находим

$$\eta' = \frac{2\eta}{\eta + 1}.$$

Задача 6 (МИЭМ).

Определите КПД цикла (рис.6), совершаемого $\nu = 3$ моль газа и состоящего из изохоры, адиабаты и изобары, если известно, что газ получил $Q_1 = 3000$ Дж тепла и в результате адиабатного расширения температура его понизилась на $\Delta T = 40$ К.

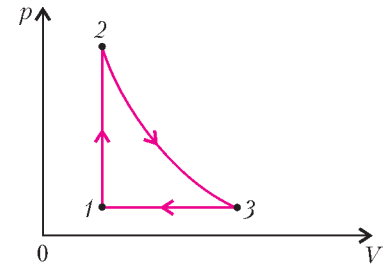


Рис. 6

Решение. Очевидно, что газ получает тепло на изохоре 1-2 и отдает его на изобаре 3-1. Поэтому

$$Q_1 = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1),$$

$$Q_2 = p_1 (V_3 - V_1) + (U_3 - U_1) =$$

$$= p_3 V_3 - p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_3 V_3 - \frac{3}{2} p_1 V_1 = \frac{5}{2} (p_3 V_3 - p_1 V_1).$$

Запишем уравнения состояния газа в точках 2 и 3:

$$p_2 V_2 = \nu R T_2, \quad p_3 V_3 = \nu R T_3.$$

Отсюда вытекает, что

$$p_2 V_2 - p_3 V_3 = \nu R (T_2 - T_3) = \nu R \Delta T.$$

По определению термодинамического коэффициента полезного действия,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \\ Q_1 = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1), \\ Q_2 = \frac{5}{2} (p_3 V_3 - p_1 V_1), \\ p_2 V_2 - p_3 V_3 = \nu R \Delta T. \end{cases}$$

Последовательно исключив из этой системы $p_3 V_3$, $p_2 V_2 - p_1 V_1$ и Q_2 , приходим к ответу

$$\eta = \frac{5 \nu R \Delta T}{2 Q_1} - \frac{2}{3} = 0,16 = 16\%.$$

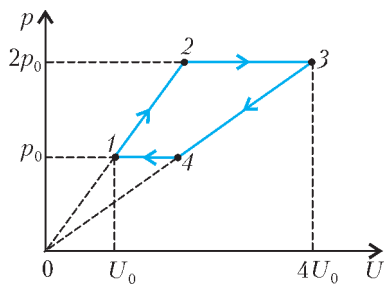


Рис. 7

Задача 7 (МИЭМ, 1991). Газ совершает цикл, изображенный на рисунке 7 в координатах p и U , где p – давление, U – внутренняя энергия газа. Определите КПД цикла.

Решение. Прежде всего представим цикл в координатах p, V . Запишем внутренние энергии газа в вершинах трапеции 1 и 3:

$$U_0 = \frac{3}{2} p_0 V_1, \quad 4U_0 = \frac{3}{2} \cdot 2p_0 V_3.$$

Отсюда находим

$$V_1 = \frac{2U_0}{3p_0}, \quad V_3 = \frac{4U_0}{3p_0}.$$

Видим, что $V_3 = 2V_1$. Участки цикла 1-2 и 3-4 – изохоры. Действительно, запишем уравнение прямой 1-2 в виде $p = \alpha U$, где α – коэффициент пропорциональности, или $p = \alpha \cdot \frac{3}{2} pV$, откуда получаем $V = \frac{2}{3\alpha} = \text{const}$. Аналогичный вывод справедлив и для участка 3-4. Следовательно,

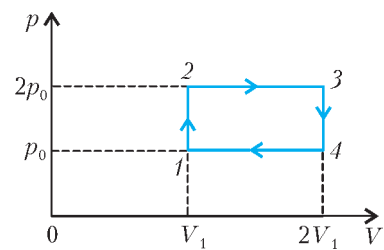


Рис. 8

$V_2 = V_1$ и $V_4 = V_3$. Тогда цикл в координатах p, V представляет собой уже встречавшийся нам в пятой задаче прямоугольник (рис.8).

Теперь приступим к расчетам. Работа цикла равна

$$A = p_0 V_1.$$

Тепло подводится к газу на участках 1-2 и 2-3, поэтому

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + A_{23} = (U_3 - U_1) + 2p_0 V_1 = \frac{3}{2} \cdot 2p_0 \cdot 2V_1 - \frac{3}{2} p_0 V_1 + 2p_0 V_1 = \frac{13}{2} p_0 V_1.$$

Значит,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{p_0 V_1}{(13/2) p_0 V_1} = \frac{2}{13} \approx 15,4\%.$$

Задача 8 (МФТИ). КПД цикла 1-2-4-1 равен η_1 , а цикла 2-3-4-2 равен η_2 . Участки 4-1 и 2-3 – изохоры, участок 3-4 – изобара, участки 1-2 и 2-4 представляют собой линейную зависимость давления от объема (рис.9). Все циклы обходятся по часовой стрелке. Найдите КПД η цикла 1-2-3-4-1.



Рис. 9

Решение. В цикле 1-2-4-1 тепло подводится на участках 1-2 и 4-1, а отводится на участке 2-4.

Значит,

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41}, \quad Q_2 = Q_{24},$$

и

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_{24}}{Q_{12} + Q_{41}}.$$

В цикле 2-3-4-2 тепло подводится на участке 4-2, а отводится на участках 2-3 и 3-4. Следовательно,

$$\eta_2 = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{24}}.$$

В цикле 1-2-3-4-1 тепло подводится на участках 1-2 и 4-1, а отводится на участках 2-3 и 3-4. Поэтому

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{41} + Q_{12}}.$$

Из формул для η_1 и η_2 найдем

$$\frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{41} + Q_{12}} = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)$$

и окончательно получим

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2.$$

Задача 9 (МГУ, физфак, 2000). На pV -диаграмме, изображенной на рисунке 10, показано изменение состояния газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя. Отношение максимальной абсолютной температуры газа к его минимальной температуре в данном цикле равно 4. Во сколько раз отличается КПД η этого цикла от максимально возможного?

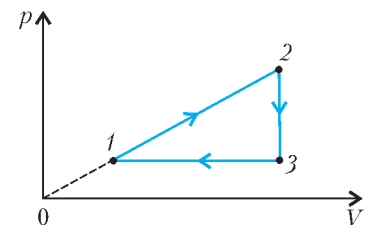


Рис. 10

Решение. Произведение pV достигает наибольшего значения в точке 2, а наименьшего – в точке 1. В силу уравнения Клапейрона-Менделеева, максимальная температура газа будет в точке 2, а минимальная – в точке 1, т.е.

$$T_2 = 4T_1.$$

Запишем уравнения состояния для вершин цикла:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1, \quad p_2 V_2 = \nu R T_2, \quad p_3 V_3 = \nu R T_3.$$

Учтем, что точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат:

$$p_1 = \alpha V_1, \quad p_2 = \alpha V_2, \quad \text{и} \quad p_2 V_1 = p_1 V_2.$$

Из всех полученных уравнений легко найдем, что

$$p_2 = 2p_1 \quad \text{и} \quad T_3 = 2T_1.$$

Известно, что КПД любой тепловой машины, работающей в некотором интервале температур, не может быть больше КПД машины, работающей по циклу Карно в том же интервале температур. В нашем случае

$$\eta_{\text{max}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{3}{4}.$$

Найдем теперь КПД данного цикла η . Работа газа за цикл равна

$$A = \frac{1}{2} (V_3 - V_1) (p_2 - p_3) = \frac{1}{2} (V_3 p_2 - V_3 p_3 - V_1 p_2 + V_1 p_3) = \frac{1}{2} (\nu R T_2 - \nu R T_3 - \nu R T_1) = \frac{\nu R T_1}{2}.$$

Очевидно, что к газу подводится тепло только на участке 1-2, поэтому

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} + (U_2 - U_1) = (A + p_1 (V_3 - V_1)) + \left(\frac{3}{2} \nu R T_2 - \frac{3}{2} \nu R T_1 \right) = 6 \nu R T_1.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{0,5vRT_1}{6vRT_1} = \frac{1}{12}, \text{ и } \frac{\eta_{\max}}{\eta} = \frac{3/4}{1/12} = 9.$$

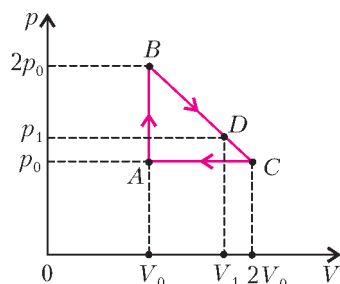


Рис. 11

Задача 10 («Задачник «Кванта», Ф820). Определите КПД цикла ABCA, изображенного на рисунке 11.

Решение. Эта задача может показаться весьма похожей на первую, ибо треугольный цикл в обеих задачах один и тот же, только расположенный по-разному. Но это сходство кажущееся, так как эта задача существенно труднее первой.

Работа газа за цикл определяется сразу:

$$A = \frac{1}{2} p_0 V_0.$$

А для нахождения подведенного количества теплоты Q_1 придется немало потрудиться. На участке AB тепло безусловно подводится, и

$$Q_{AB} = U_B - U_A = \frac{3}{2} \cdot 2p_0 V_0 - \frac{3}{2} p_0 V_0 = \frac{3}{2} p_0 V_0.$$

На участке BC давление все время падает, объем все время растет, а вот температура изменяется более сложно – сначала она до некоторой точки D растет, а потом падает, возвращаясь в точке C к первоначальному значению (в точке B). Это означает, что тепло подводится к газу не на всем участке BC, а только на этапе BD. Найдем Q_{BD} .

Запишем первый закон термодинамики для малого количества теплоты:

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V = \Delta\left(\frac{3}{2}pV\right) + p\Delta V = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p$$

(мы использовали равенство $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$). Приравняв ΔQ к нулю, получим

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{5}{3} \frac{p}{V}.$$

Из графика найдем

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{p_0}{V_0}, \text{ т.е. } \frac{p_0}{V_0} = \frac{5}{3} \frac{p}{V}.$$

Уравнение прямой BC легко пишется по двум известным точкам:

$$p = -\frac{p_0}{V_0} V + 3p_0.$$

Таким образом, для координат точки D получаем

$$p_1 = \frac{9}{8} p_0, \quad V_1 = \frac{15}{8} V_0$$

(видно, что $p_1 V_1$ лежит между соответствующими произведениями для точек B и C) и находим

$$\begin{aligned} Q_{BD} &= (U_D - U_B) + \frac{1}{2}(2p_0 + p_1)(V_1 - V_0) = \\ &= \frac{3}{2} p_1 V_1 - \frac{3}{2} \cdot 2p_0 V_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{25}{8} p_0 V_0 = \frac{49}{32} p_0 V_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BD} = \frac{3}{2} p_0 V_0 + \frac{49}{32} p_0 V_0 = \frac{97}{32} p_0 V_0,$$

и

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(1/2)p_0 V_0}{(97/32)p_0 V_0} = \frac{16}{97} \approx 16,5\%.$$

Упражнения

1. На рисунке 12 представлен цикл турбореактивного двигателя, состоящий из двух изобар и двух адиабат. По известным температурам T_1, T_2, T_3, T_4 найдите КПД цикла.

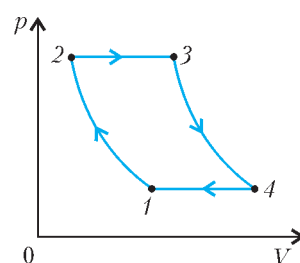


Рис. 12

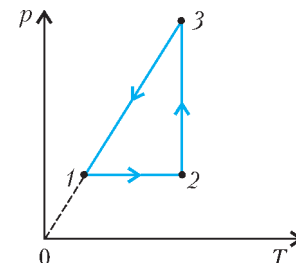


Рис. 13

2 (МИЭТ). Определите КПД цикла, изображенного на рисунке 13, если известно, что в начальном состоянии 1 температура газа $T_1 = 300$ К, отношение объемов газа в состояниях 3 и 2 равно 2 и при изотермическом расширении газ совершает работу $A = 5$ кДж. Количество вещества газа $\nu = 1$ моль.

3 (МАИ, 2003). Коэффициент полезного действия цикла $1-2-3-1$ (рис. 14) равен $\eta = 15\%$. Найдите КПД цикла $3-5-4-3$.

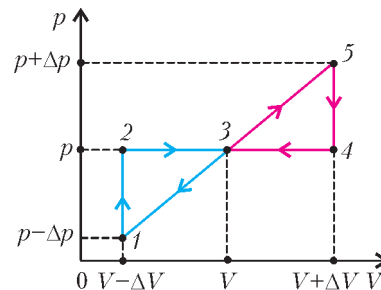


Рис. 14

4 (МГУ, физфак, 1995).

Давление газа меняют от величины p_1 до величины p_2 в соответствии с pV -диаграммой, имеющей вид треугольника, показанного на рисунке 15. Найдите КПД цикла, если температура газа в состоянии 3 больше его температуры в состоянии 1.

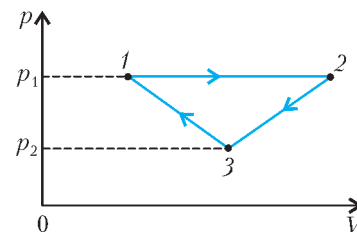


Рис. 15

5 (МАИ, 2003). Цикл состоит из изохоры $1-2$, изобары $2-3$ и прямой $3-1$ (рис. 16). Температуры в точках 1, 2 и 3 связаны соотношениями $T_2 = 1,5T_1$ и $T_3 = 3T_1$. Определите КПД цикла.

6 (МФТИ). Цикл $1-2-3-1$ состоит из прямолинейного участка $1-2$, адиабаты $2-3$ и изотермы $3-1$ (рис. 17). Его КПД равен

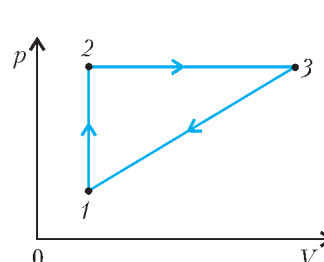


Рис. 16

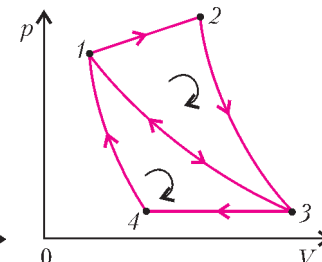


Рис. 17

η_1 . Цикл $1-3-4-1$ состоит из изотермы $1-3$, изобары $3-4$ и адиабаты $4-1$. Его КПД равен η_2 . Определите КПД цикла $1-2-3-4-1$. Все циклы обходятся по часовой стрелке.